

07/10 Единственность реш-я в задачах
теплопровод-ти с классич. усл-ями
* задачу:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq l, t > 0, \\ \Gamma_0(u) = \mu_0(t), \Gamma_l(u) = \mu_l(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1)$$

$\Downarrow$ (0!) $\uparrow$ при некот. ф-циях $\mu_0(t), \mu_l(t), \varphi(x)$ задача (1) имеет реш. $u \in C^{2,1}([0, l] \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ ($u = u(x, t)$).

Тогда в данном классе это реш. !, где
 Γ_0, Γ_l — классич. кр. операторы
* МФ: if есть 2 реш., то они сов-

затемельно совпадут.

Имеется 2 р-ии. $u, u^{(1)} \in C^{2,1}([0, l] \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$

* разность $v \equiv u^{(1)} - u \Leftrightarrow v(x, t) = u^{(1)}(x, t) - u(x, t)$

В силу линейности получаем однород. задачу:
$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ \Gamma_0(v) = 0, \Gamma_l(v) = 0, \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Требуется показать, что $v(x, t) \equiv 0$ (?)
При этом $v \in C^{2,1}([0, l] \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$

* вспомогат. $\int$ (типа энергии): $F(t) = \frac{1}{2a^2} \int_0^l (v(x, t))^2 dx, t \geq 0 \Rightarrow F \in C^1([0, +\infty)) \cap C([0, +\infty))$

При $t > 0$ * производную: $F'(t) = \frac{1}{a^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^l v(x, t) v_t(x, t) dx &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{a^2} \int_0^l v(x, t) \cdot a^2 v_{xx}(x, t) dx \\ &= \int_0^l v(x, t) v_{xx}(x, t) dx = v(x, t) v_x(x, t) \Big|_0^l - \\ &\quad - \int_0^l (v_x(x, t))^2 dx \leq v(x, t) v_x(x, t) \Big|_0^l = \end{aligned}$$

$= v(l, t) v_x(l, t) - v(0, t) v_x(0, t) \leq \{ \text{лемма} \} \leq 0$
 Итак, $F'(t) \leq 0$ при $t > 0$. При этом $F(t) \geq 0$
 Кроме того, $F(0) = \frac{1}{2a^2} \int_0^l (v(x, 0))^2 dx = 0$
 (из начал. усл.)

а) $F(t) \geq 0$ при $t \geq 0$,

б) $F'(t) \leq 0$ при $t > 0$,

в) $F(0) = 0$.

Из а), б), в) $\Rightarrow F(t) \equiv 0$

при $t \geq 0 \Rightarrow v(x, t) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l, t \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u^*(x, t) = u(x, t)$ при $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ ■

~~$P_0, P_l = \text{классов кр. опер}$~~ В случае кр.
 усл. 1-го рода имеется альтернат. способ
 док-ва! , приведем в более широком
 классе. Этот способ связан с принци-
 пом extr.

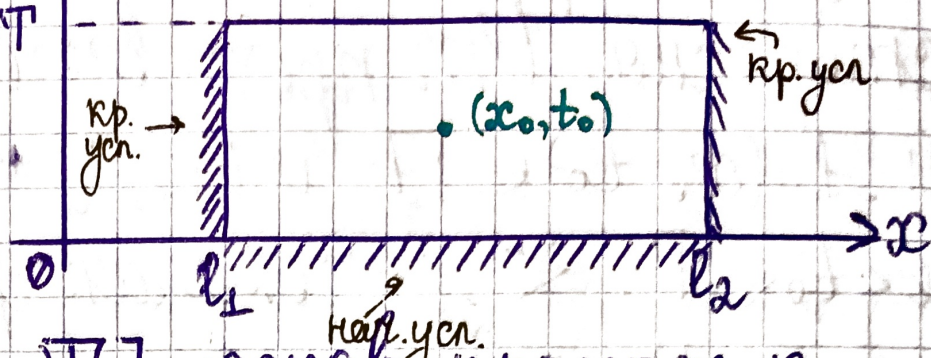
§. Принцип экстремума д/уравн. теплопроводности

Принципы extr $\neq$ Принципы max и min
 тип. Они важны д/уравн. парабо-
 лическ. и эллиптическ. типов. Д/гиперболическ. ур-

- или почти не встречается. $\neq$ однородности теплопроводности.

Ситуация

начал. момент времени T



"большое π "

$\Pi = (l_1, l_2) \times (0, T]$ — основ. прямоугольник

$\Gamma = (\{l_1\} \times [0, T]) \cup ([l_1, l_2] \times \{0\}) \cup (\{l_2\} \times [0, T])$ — парабол. граница ∂/Π

$\bar{\Pi} = \Pi \cup \Gamma$ — замыкание ∂/Π

$\Downarrow$ (Принцип экстр) $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$,

$u = u(x, t)$ — реш. ур-ния $u_t = a^2 u_{xx}$ при $l_1 < l_2$, $0 < t \leq T$. Обозн. $M = \max_{\bar{\Pi}} u(x, t)$; $m =$

$= \min_{\bar{\Pi}} u(x, t)$ — max и min на парабол. границе. Тогда $m \leq u(x, t) \leq M$ при $\forall (x, t) \in \Pi$

Физич. коммент-рий: при отсутствии внутр. ист. тепла max темпер-ры внутри тела не может превосходить max темпер-ры в начал. момент време

ни или на границе. Это означает, что модель Фурье физически оправдана.

▲ (И.И. Привалов) $l \equiv l_2 - l_1$ — длина стержня. От противного: $\neg$ (1) наруши-

и $\exists (x_0, t_0) \in \Pi$: и $u(x_0, t_0) = A > M$, $l_1 < x_0 < l_2$, $0 < t_0 < T$. $\times$ вспомогат. ф-цию: $v(x, t) =$

$$= u(x, t) + \frac{A-M}{2l^2} (x-x_0)^2, \quad \forall (x, t) \in \Pi. \text{ На}$$

$$\Gamma \text{ имеем: а) } |v(x, t)|_{\Gamma} \leq M + \frac{A-M}{2l^2} \cdot l^2 = M + \frac{A-M}{2} =$$

$$= \frac{A+M}{2} < A \quad \{A > M\}$$

$$\text{б) } v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + 0 = u(x_0, t_0) = A > M$$

Из а) и б) $\Rightarrow \max v(x, t)$ не может достигаться на границе Γ . Но где-то в Π он достигается, т.к. $v \in C(\bar{\Pi})$ // [Вейерштрасс] $\Rightarrow$ он

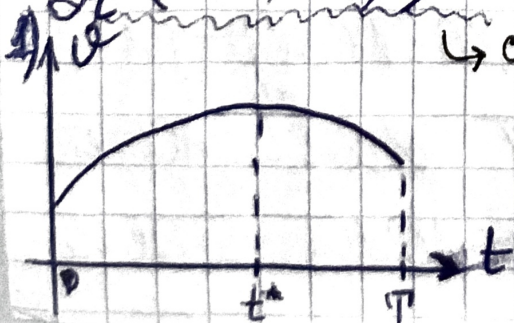
достигается в Π и $\exists$ т. $(x^*, t^*) \in \Pi$: $u(x^*, t^*) = \max_{\Pi} u$, $l_1 < x^* < l_2$, $0 < t^* < T$. В этой т.

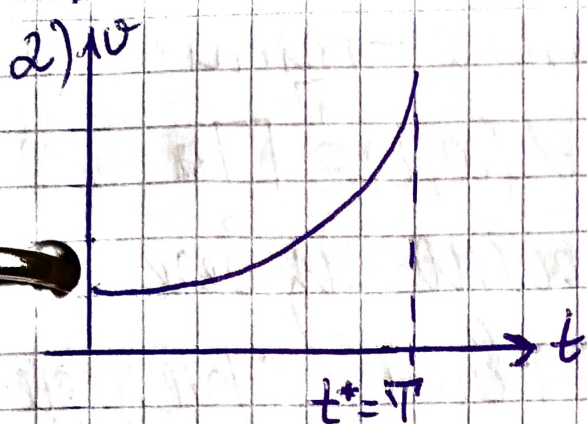
$$\frac{\partial v}{\partial t}(x^*, t^*) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x^*, t^*) \leq 0$$

$\hookrightarrow$ смотри рис. 1, рис. 2 $\hookrightarrow$ см. рис. 3

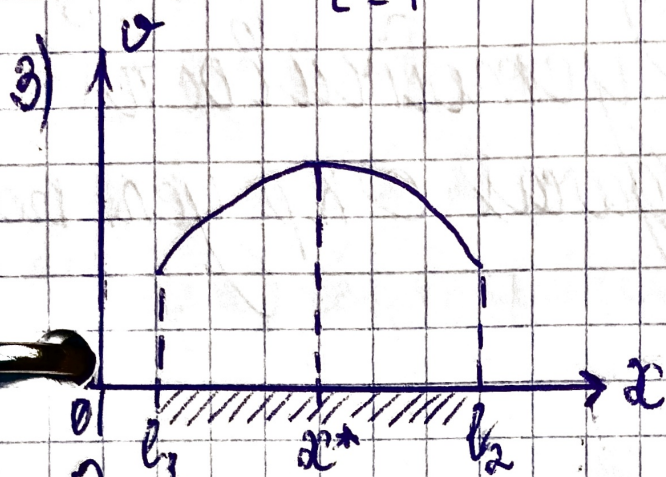
$$\frac{\partial v}{\partial t}(x^*, t^*) = 0$$

// т. внутр. max //





$$\frac{\partial u}{\partial t}(x^*, t^*) = \frac{\partial u}{\partial t}(x^*, T) \geq 0$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^*, t^*) \leq 0$$

Отсюда $\Rightarrow (u_t - a^2 u_{xx})|_{(x,t)=(x^*,t^*)} = u_t(x^*, t^*) - a^2 u_{xx}(x^*, t^*) \geq 0$

С другой стороны: $(u_t - a^2 u_{xx})|_{(x,t)=(x^*,t^*)} \stackrel{\text{def}}{=} u_t(x^*, t^*) - a^2 u_{xx}(x^*, t^*) + 0 - a^2 \frac{A-M}{l^2} =$

$\equiv 0$, т.к. $u(x, t)$ — реш.

$= -\frac{a^2(A-M)}{l^2} < 0$

Получили (!?): $|u_t - a^2 u_{xx} \geq 0$ — (!?) в т. (x^*, t^*)

$|u_t - a^2 u_{xx} < 0$

$\Rightarrow$ исход. допущение неверно $\Rightarrow u(x, t) \leq M$
 $\forall (x, t) \in \Pi$. Итак, (1) доказан $\forall \max$.

$\Phi / \min$ все проще! $\neq u(x, t) \equiv -u(x, t)$ —
 — тоже реш. $\max u = -\min u$ ($\alpha \leq u \leq \beta \sim -\beta \leq -u \leq -\alpha$)

В силу (1) $w(x, t) = -u(x, t) \leq -\min u = -m$,
 $\forall (x, t) \in \Pi \Rightarrow u(x, t) \geq m, \forall (x, t) \in \Pi$ ■

Из принципа экстр. обычно из веро-
яются стандарт. следствия: принци-
пы позитивности, ! и устойчивости
реш. В нелинейн. задачах с кр. усл. 1го
рода